

Carre (カレ) の手法を用いた半導体レーザー位相シフト干渉計測法 Laser-diode phase shifting interferometry with Carre technique

小野寺理文 高橋毅 櫻井光広 (職業能力開発総合大学校)

Ribun Onodera, Takeshi Takahashi and Mitsuhiro Sakurai

Optical interferometry with laser has been developed for noncontact profiling of surfaces and noncontact diagnostics of precision systems.¹⁾ We have proposed phase-shifting interferometers with a frequency-modulated laser diode (LD).²⁾ The phase shifts were easily produced at high speed by changing the wavelength of the LD on an unbalanced interferometer through the variation of injection current.³⁾ The phase measurement without making calibration of the phase shifts has been realized by Carre technique⁴⁾ in which phase shifts at regular intervals are produced by stepwise current modulation of the LD. A phase error caused by the power change of the LD has been analyzed theoretically and a phase extraction algorithm which is insensitive to changes in laser power associated with current variation has been newly developed.⁵⁾ A new algorithm for LD phase-shifting interferometer with Carre technique is proposed and a phase without the error caused by the power change can be obtained.

Keyword: Optical Interferometry, Laser Diode, Phase Shifting Interferometer

1. 半導体レーザー位相シフト干渉計

LD 位相シフト干渉法は、光源に LD を使用し、その直接周波数変調特性を利用して位相シフトを与え、被検位相物体を干渉計測する方法である。図 1 は、LD 位相シフト干渉計測法の実験システムであり、発振波長 λ の LD を用いた光路差 l を有するトワイマン・グリーン干渉計を表している。LD 光は、水平方向に対して 45° 方向に直線偏光しており、対物レンズによりコリメートされ、平行光となる。コリメートされた光は、偏光ビームスプリッタ (PBS) により物体光と参照光に振幅分割される。分割された光は $\lambda/4$ 板を通過し、被検物体の表面と参照光側のミラーでそれぞれ反射し、再び $\lambda/4$ 板を通過して偏光ビームスプリッタで重なり、たがいに直行する直線偏光状態となる。物体光と参照光は偏光板を通過することにより、干渉光となる。干渉縞画像は結像レンズにより CCD カメラに結像され撮像される。

LD は、注入電流の増加に伴って発振波長が長波長側へ偏移する直接周波数変調特性を有しており、不等光路干渉計へ応用することにより位相シフトが実現できる。位相シフト量 $\Delta\phi$ は、あらかじめ与えられた 2 光束間の光路差 l と注入電流変化量 Δi に比例しており、次式で与えられる。

$$\Delta\phi = -2\pi \frac{l}{\lambda^2} \alpha \Delta i \quad (1)$$

ここで α は LD の電流変調効率であり、 Δi の注入電流変化により LD の波長が $\Delta\lambda = \alpha\Delta i$ だけ偏移する。(1)式で示したように、LD 注入電流変化により、位相シフトを生成することができるので、電流変調のスピードを速くすることにより高速な位相シフトを実現でき、ダイナミックな干渉計測へ応用可能となる。

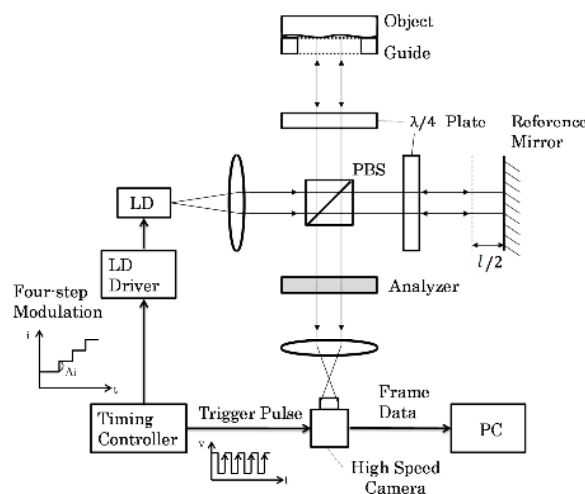


図 1 LD 位相シフト干渉計

2. 8 枚の干渉縞を利用した Carre の手法

一般的に位相シフト干渉法では、シフト量が既知であ

る複数枚の干渉縞信号を用いて被検位相分布が導出できる^{6,7)}。それに対して, Carre の手法は, 位相シフト量が不明でも等間隔な場合, 4 枚以上の干渉縞強度から, 被検位相を導出することが出来る。ここでは, 次式に示す等間隔な位相シフト $\Delta\phi$ が与えられた 8 枚の干渉縞強度 J_n から被検位相を導出できるアルゴリズムを示す。

$$J_n = J_M [1 + \gamma \cos \{ \phi - \frac{1}{2} (2n-9) \Delta\phi \}] \quad (2)$$

$$(n = 1, \dots, 8)$$

$$\phi = 2\pi \frac{w}{\lambda} \quad (3)$$

ここで, J_M はバイアス強度, γ は可視度, ϕ は被検位相, w は被検光路である。位相シフト量 $\Delta\phi$ と被検位相 ϕ は, J_1, \dots, J_8 を用いて次式で求めることができる。

$$\tan \frac{\Delta\phi}{2} = \left(\frac{J_1 - 7J_2 + 21J_3 - 35J_4 + 35J_5 - 21J_6 + 7J_7 - J_8}{J_1 + J_2 - 3J_3 - 3J_4 + 3J_5 + 3J_6 - J_7 - J_8} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (4)$$

$$\phi = \tan^{-1} \left[\frac{1 - J_1 - J_2 + 3J_3 + 3J_4 - 3J_5 - 3J_6 + J_7 + J_8}{\tan \frac{\Delta\phi}{2} (J_1 + 3J_2 + J_3 - 5J_4 - 5J_5 + J_6 + 3J_7 + J_8)} \right] \quad (5)$$

(4)式と(5)式の導出の詳細は, 付録に記載する。

LD 位相シフト干渉計では, LD 注入電流変化によって位相シフトを生成するため, 光パワーも変化するのでバイアス強度も変動し, 干渉信号は次式で与えられる。

$$I_n = I_M^0 \left\{ 1 + \frac{1}{2} (2n-9) \rho \right\} [1 + \gamma \cos \{ \phi - \frac{1}{2} (2n-9) \Delta\phi \}] \quad (6)$$

$$(n = 1, \dots, 8)$$

ここで, I_M^0 は位相シフトが 0 の時のバイアス強度, ρ は $\Delta I / I_M^0$ であり, ΔI は 1 ステップの位相シフト量 $\Delta\phi$ を生成するために必要な電流変調によって生じたバイアス強度の変化である。また, レーザー発振領域において, 注入電流に対して, LD 光パワーはリニアに増加すると仮定した。 I_1, \dots, I_8 の干渉縞強度を J_1, \dots, J_8 の代わりに, (4)式と(5)式へ代入して位相シフト量と被検位相を導出した場合, バイアス強度変化による誤差が生成される。

図 2 は, 被検光路 w が 0 から λ まで変化したときの(4)式で求められた位相シフト量 $\Delta\phi$ と(5)式で求められた被検位相 ϕ の数値計算結果である。 J_1, \dots, J_8 の代わりに I_1, \dots, I_8 の干渉縞強度を用いており, $\gamma = 0.8$, $\Delta\phi = 110^\circ$ を仮定している。

(a)は, バイアス強度の変化がない $\rho = 0$ の場合で, J_1, \dots, J_8 の干渉縞強度を用いた場合に相当する。図から明らかなように, 位相シフト量が求められており, 被検光路の増加に伴い被検位相が, 誤差なく導出されることがわかる。この結果より, 干渉信号のバイアス強

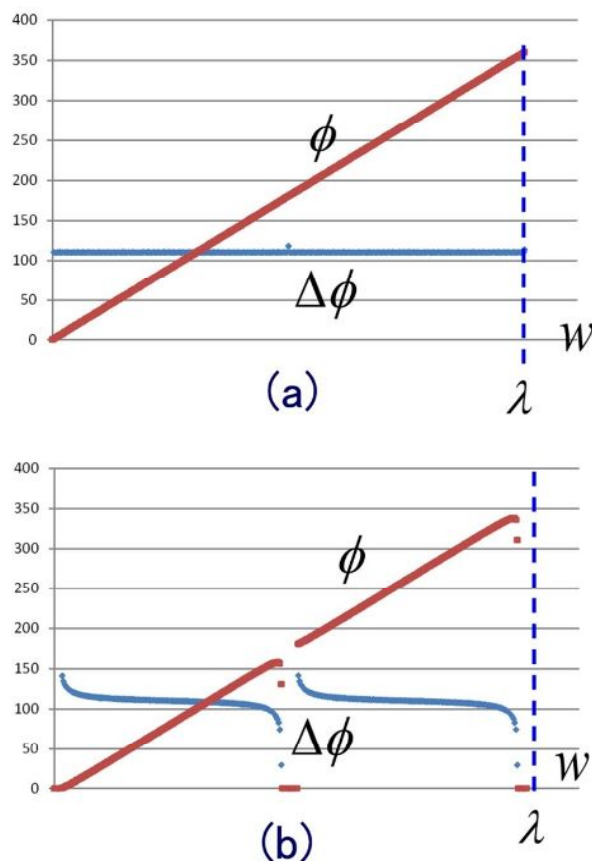


図 2 被検光路に対する被検位相: (a)バイアス強度が一定の場合, (b)バイアス強度変化がある場合 ($\rho = 0.05$)

度変化がない場合, (4)式, (5)式により位相シフト量と被検位相が導出できることが示された。図 2(b)は, $\rho = 0.05$ を仮定した場合の(4)式, (5)式により求められた, 位相シフト量と被検位相を表している。仮定した位相シフト量に対して, 誤差を伴った位相シフト量が求められている。さらに, 位相シフト量を求めることができない領域もあり, 被検位相にも誤差が生じていることがわかる。このように, 干渉縞強度に強度変調があると, (4)式, (5)式では正確な位相シフト量と被検位相を求めることができなくなる。

3. 強度変調に不感な Carre の手法の開発

ここでは, 強度変調を伴った干渉信号強度の強度変調に関係した項 (ρ が含まれている項) を除去して, 位相シフト量と被検位相を導出できるアルゴリズムを新たに導出する。 I_1, \dots, I_8 の干渉縞強度から以下の式で与えられる N_1, N_2, N_3 を計算する。

$$N_1 = (I_3 - I_6) - 3(I_4 - I_5)$$

$$N_2 = (I_2 - I_7) - 5(I_4 - I_5) \quad (7)$$

$$N_3 = (I_1 - I_8) - 7(I_4 - I_5)$$

I_1, \dots, I_8 を代入して整理すると,

$$\begin{aligned} N_1 &= 8I_M^0 \gamma \sin \phi S^3 - 12\rho I_M^0 \gamma \cos \phi C(C^2 - 1) \\ N_2 &= -8I_M^0 \gamma \sin \phi S^3 (4S^2 - 5) - 20\rho I_M^0 \gamma \cos \phi C(C^2 - 1)(4C^2 - 1) \\ N_3 &= 16I_M^0 \gamma \sin \phi S^3 (8S^4 - 14S^2 + 7) - 56\rho I_M^0 \gamma \cos \phi C(C^2 - 1)(4C^2 - 1)(2C^2 - 1) \end{aligned} \quad (8)$$

となる。ただし、 $S = \sin \frac{\Delta\phi}{2}, C = \cos \frac{\Delta\phi}{2}$ とする。

N_1, N_2, N_3 から $I_M^0 \gamma \sin \phi$ と $\rho I_M^0 \gamma \cos \phi$ の項を消去することにより、次式が得られる。

$$16N_1 C^4 + 8(N_1 - N_2)C^2 - (3N_1 - N_2 - N_3) = 0 \quad (9)$$

(9)式は、強度変調を考慮した干渉縞信号から位相シフト量を求めることができる式であり、強度変調に関係した項(ρ が含まれている項)に不感な式である。次に、次式で定義される N_4, N_5, N_6 を計算する。

$$\begin{aligned} N_4 &= (I_3 + I_6) - (I_4 + I_5) \\ N_5 &= (I_2 + I_7) - (I_4 + I_5) \\ N_6 &= (I_1 + I_8) - (I_4 + I_5) \end{aligned} \quad (10)$$

I_1, \dots, I_8 を代入すると、

$$\begin{aligned} N_4 &= 8I_M^0 \gamma \cos \phi C(C^3 - 1) + 4\rho I_M^0 \gamma \sin \phi S(2 - 3S^2) \\ N_5 &= 8I_M^0 \gamma \cos \phi C(C^3 - 1)(4C^2 - 1) + 4\rho I_M^0 \gamma \sin \phi S(20S^4 - 25S^2 + 6) \\ N_6 &= 16I_M^0 \gamma \cos \phi C(C^3 - 1)(2C^2 - 1)(4C^2 - 1) + 8\rho I_M^0 \gamma \sin \phi S(-56S^6 + 98S^4 - 49S^2 + 6) \end{aligned} \quad (11)$$

となる。 $I_M^0 \gamma \cos \phi$ と $\rho I_M^0 \gamma \sin \phi$ の項を消去することにより、次式が得られる。

$$16N_4 C^4 - 8(N_4 + N_5)C^2 + (N_4 + 3N_5 + N_6) = 0 \quad (12)$$

(12)式は、(9)式と同様、強度変調に関係した項(ρ が含ま

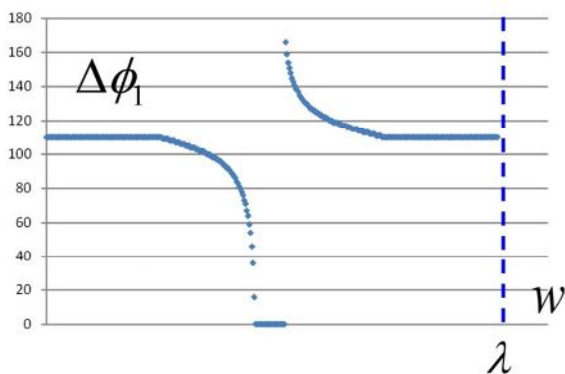


図3 (13)式により求められた位相シフト量 $\Delta\phi_1$

れている項)に不感に位相シフト量を求めることができる式である。

(9)式、(12)式を C^2 の2次方程式として解き、その平方根から位相シフト量を4つの形式で求めることができる。

$$\begin{aligned} \Delta\phi_1 &= 2 \cos^{-1} \left[\frac{-(N_1 - N_2) + \sqrt{4N_1^2 - N_2^2 - 3N_1N_2 - N_1N_3}}{4N_1} \right] \\ \Delta\phi_2 &= 2 \cos^{-1} \left[\frac{-(N_1 - N_2) - \sqrt{4N_1^2 - N_2^2 - 3N_1N_2 - N_1N_3}}{4N_1} \right] \\ \Delta\phi_3 &= 2 \cos^{-1} \left[\frac{(N_4 + N_5) + \sqrt{N_5^2 - N_4N_5 - N_4N_6}}{4N_4} \right] \\ \Delta\phi_4 &= 2 \cos^{-1} \left[\frac{(N_4 + N_5) - \sqrt{N_5^2 - N_4N_5 - N_4N_6}}{4N_4} \right] \end{aligned} \quad (13)$$

図3は、位相シフト量を $\Delta\phi = 110^\circ$ を仮定し、被検光路 w を0から λ まで変化させたときの干渉信号強度 I_1, \dots, I_8 を利用して、(13)式により求めた $\Delta\phi_1$ を示している。ほぼ、半分の領域で位相シフト量が正確に求められているが、求められない領域があり、その周辺では、誤った位相シフト量が計算されていることがわかる。図3の結果より、ひとつの形式では位相シフト量が正確に求めることが出来ないため、他の形式も併用して4つの形式で求めた4つ位相シフト量から、最適な位相シフト量を推定することを考える。

図4は、(13)式により求めた位相シフト量 $\Delta\phi_1 \sim \Delta\phi_4$ を表している。図から明らかなように、どの被検光路に対しても、 $\Delta\phi_1 \sim \Delta\phi_4$ のうち2つ以上が正確な位相シフト量として導出されており、これを利用することにより、位相シフト量 $\Delta\phi$ を求めることができるようになる。

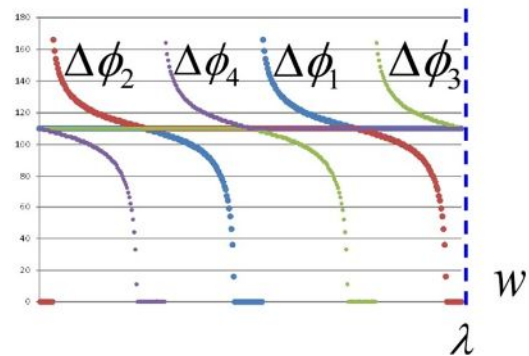


図4 4つの形式で求めた位相シフト量

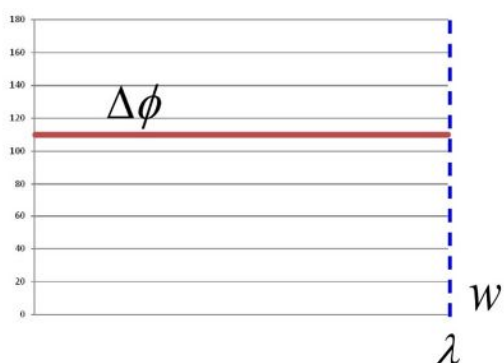


図 5 位相シフト量の導出

図 5 は, 4 つの位相シフト量 $\Delta\phi_1 \sim \Delta\phi_4$ の最頻値を選択することにより求めた位相シフト量を表している. どの被検光路に対しても, 正確な位相シフト量が導出できていることがわかる. 実際の測定に対しては, ノイズ等の影響があるので, メディアンフィルター的な処理が望ましいと考えられ, 現在考察中である.

干渉信号のバイアス強度が変化する場合でも, 注入電流に対してリニアな光パワー変動を仮定することにより, 位相シフト量が導けることを示した. 次に, バイアス強度変化があっても, 被検位相を導出できるアルゴリズムを求める. (8)式より, $\sin\phi$ は, 次式で与えることができる.

$$\sin\phi = -\frac{5(4C^2 - 1)N_1 - 3N_2}{64I_M^0 S^5}$$

また(11)式より, $\cos\phi$ は, 次式で与えることができる.

$$\cos\phi = \frac{(20S^4 - 25S^2 + 6)N_4 - (2 - 3S^2)N_5}{64I_M^0 S^4 C^3}$$

よって, 被検位相は, 前節で求めた位相シフト量 $\Delta\phi$ により定まる S と C を用いて, 次式で求めることができる.

$$\phi = \tan^{-1} \left[\frac{-C^3 \{5(4C^2 - 1)N_1 - 3N_2\}}{S \{20S^4 - 25S^2 + 6\}N_4 - (2 - 3S^2)N_5} \right] \quad (14)$$

図 6 は, (14)式を用いて数値計算した被検位相 ϕ の結果である. 被検光路 w を 0 から λ まで変化させ, (3)式で定まる被検位相 ϕ を(6)式へ代入して干渉信号強度 I_1, \dots, I_8 を求める. 次に, I_1, \dots, I_8 を(7)式,(10)式に代入して N_1, N_2, N_4, N_5 を求めて, (14)式により被検位相 ϕ を計算する. 図 2(b)と同じ干渉縞信号を利用して被検位相を導出しているが, 図 2(b)で現れた位相誤差は無くなり, 正確に干渉位相が求められていることが明らかで

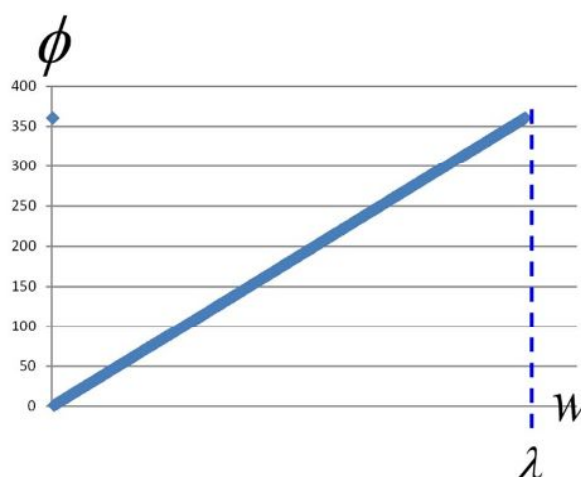


図 6 バイアス強度変化に不感なアルゴリズムによる被検位相の導出結果

ある. この結果から, 干渉信号のバイアス強度変化がある場合でも, それに不感な位相導出アルゴリズムが開発できたことが証明された.

4. まとめ

本論文は, Carre のアルゴリズムを用いた LD 位相シフト干渉計で問題となる, LD の AM 変動で生じるバイアス強度変化に起因する測定位相誤差について考察を行い, その変動に不感に被検位相を導出することができるアルゴリズムを新たに提案し, その有効性について, 数値計算により検証を行った. LD 注入電流に対して光パワーがリニアに変化することを仮定し, バイアス強度変化と位相シフト量が比例することを利用して, 等間隔に与えられた位相シフト量が求められることを示した. さらに, その位相シフト量から, 被検位相を誤差なく導出できることを示した. 本アルゴリズムを利用することにより, LD を光源とした, 小型で簡便な干渉計測計が実現できる.

参考文献

- [1] J. Z. Malacara, in *Optical Shop Testing*, ed. D. Malacara (A Wiley-Interscience, New York, 1992), pp. 501-598.
- [2] 小野寺理文, 『周波数変調半導体レーザーを用いた干渉計測法』, 光学第 29 巻第 8 号 (2000), pp. 514-520 (平成 11 年度光学論文賞受賞記念解説記事).
- [3] Y. Ishii, "Laser-diode interferometry," in *Progress in Optics*, E. Wolf, ed. (Elsevier, Amsterdam, 2004), Vol. 46, pp.243-309
- [4] P. Carre, "Installation et utilisation du comparateur photoelectrique et interferentiel du Bureau International des Poids et Mesures," *Metrologia* 2, 13-23 (1966).
- [5] R. Onodera and Y. Ishii, "Phase-extraction analysis of laser-diode phase-shifting interferometry that is insensitive to changes in laser power," *Journal of the Optical Society of America A*, Vol. 13 No. 1 (1996), pp. 139-146.

- [6] K. Creath, "Phase-measurement interferometry techniques," in *Progress in Optics*, E. Wolf, ed. (Elsevier, Amsterdam, 1988), Vol. 26, pp.349-393
- [7] J. H. Bruning, D. R. Herriott, J. E. Gallagher, D. P. Rosenfeld, A. D. White, and D. J. Brangaccio, "Digital wavefront measuring interferometer for testing optical surfaces and lenses," *Appl. Opt.* 13, 2693-2703 (1974).

(原稿受付 2016/2/15, 受理 2016/6/13)

*小野寺理文, 博士 (工学)
職業能力開発総合大学校, 〒187-0035 東京都小平市小川
西町 2-32-1 email: onodera@uitech.ac.jp
Ribun Onodera, Polytechnic University, 2-32-1

Ogawa-Nishi-Machi, Kodaira, Tokyo 187-0035

*高橋毅, 博士 (工学)
職業能力開発総合大学校, 〒187-0035 東京都小平市小川
西町 2-32-1 email: take@uitech.ac.jp
Takeshi Takahashi, Polytechnic University, 2-32-1
Ogawa-Nishi-Machi, Kodaira, Tokyo 187-0035

*櫻井光広, 博士 (工学)
職業能力開発総合大学校, 〒187-0035 東京都小平市小川
西町 2-32-1 email: sakurai@uitech.ac.jp
Mitsuhiro Sakurai, Polytechnic University, 2-32-1
Ogawa-Nishi-Machi, Kodaira, Tokyo 187-0035

付録 (4)式, (5)式の導出

(4)式の分子は,

$$\begin{aligned}
 & J_1 - 7J_2 + 21J_3 - 35J_4 + 35J_5 - 21J_6 + 7J_7 - J_8 \\
 &= (J_1 - J_8) - 7(J_2 - J_7) + 21(J_3 - J_6) - 35(J_4 - J_5) \\
 &= -2J_M \gamma \sin \phi \left\{ \sin\left(\frac{7}{2}\Delta\phi\right) - 7\sin\left(\frac{5}{2}\Delta\phi\right) + 21\sin\left(\frac{3}{2}\Delta\phi\right) - 35\sin\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right) \right\} \\
 &= -2J_M \gamma \sin \phi \left\{ -64\sin^7\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right) + 112\sin^5\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right) - 56\sin^3\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right) + 7\sin\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right) \right. \\
 &\quad \left. - 112\sin^5\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right) + 140\sin^3\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right) - 35\sin\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right) \right. \\
 &\quad \left. - 84\sin^3\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right) + 63\sin\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right) \right. \\
 &\quad \left. - 35\sin\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right) \right\} \\
 &= -2J_M \gamma \sin \phi \left\{ -64\sin^7\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right) \right\} \\
 &= 128J_M \gamma \sin \phi \sin^7\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right)
 \end{aligned}$$

(4)式の分母は,

$$\begin{aligned}
 & J_1 + J_2 - 3J_3 - 3J_4 + 3J_5 + 3J_6 - J_7 - J_8 \\
 &= (J_1 - J_8) + (J_2 - J_7) - 3(J_3 - J_6) - 3(J_4 - J_5) \\
 &= -2J_M \gamma \sin \phi \sin\left(\frac{7}{2}\Delta\phi\right) - 2J_M \gamma \sin \phi \sin\left(\frac{5}{2}\Delta\phi\right) + 6J_M \gamma \sin \phi \sin\left(\frac{3}{2}\Delta\phi\right) + 6J_M \gamma \sin \phi \sin\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right) \\
 &= -2J_M \gamma \sin \phi \cdot 2\sin(3\Delta\phi)\cos\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right) + 6J_M \gamma \sin \phi \cdot 2\sin(\Delta\phi)\cos\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right) \\
 &= -4J_M \gamma \sin \phi \cos\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right) \cdot \{\sin(3\Delta\phi) - 3\sin(\Delta\phi)\} \\
 &= 16J_M \gamma \sin \phi \cos\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right) \sin^3(\Delta\phi) \\
 &= 16J_M \gamma \sin \phi \cos\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right) \{2\sin\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right)\cos\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right)\}^3 \\
 &= 128J_M \gamma \sin \phi \sin^3\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right)\cos^4\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right)
 \end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned}
 & \frac{J_1 - 7J_2 + 21J_3 - 35J_4 + 35J_5 - 21J_6 + 7J_7 - J_8}{J_1 + J_2 - 3J_3 - 3J_4 + 3J_5 + 3J_6 - J_7 - J_8} \\
 &= \frac{128J_M \gamma \sin \phi \sin^7\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right)}{128J_M \gamma \sin \phi \sin^3\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right)\cos^4\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right)} \\
 &= \tan^4 \frac{\Delta\phi}{2}
 \end{aligned}$$

(5)式の分子は,

$$\begin{aligned}
 & -J_1 - J_2 + 3J_3 + 3J_4 - 3J_5 - 3J_6 + J_7 + J_8 \\
 &= -(J_1 - J_8) - (J_2 - J_7) + 3(J_3 - J_6) + 3(J_4 - J_5) \\
 &= -2J_M \gamma \sin \phi \left\{ -\sin\left(\frac{7}{2}\Delta\phi\right) - \sin\left(\frac{5}{2}\Delta\phi\right) + 3\sin\left(\frac{3}{2}\Delta\phi\right) + 3\sin\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right) \right\} \\
 &= -2J_M \gamma \sin \phi \left\{ 64\sin^7\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right) - 112\sin^5\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right) + 56\sin^3\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right) - 7\cos\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right) \right. \\
 &\quad \left. - 16\sin^5\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right) + 20\sin^3\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right) - 5\sin\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right) \right. \\
 &\quad \left. - 12\sin^3\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right) + 9\sin\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right) \right. \\
 &\quad \left. + 3\sin\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right) \right\} \\
 &= -2J_M \gamma \sin \phi \left\{ 64\sin^7\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right) - 128\sin^5\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right) + 64\sin^3\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right) \right\} \\
 &= -128J_M \gamma \sin \phi \sin^3\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right) \left\{ \sin^4\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right) - 2\sin^2\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right) + 1 \right\} \\
 &= -128J_M \gamma \sin \phi \sin^3\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right) \cos^4\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right)
 \end{aligned}$$

(5)式の分母は,

$$\begin{aligned}
 & J_1 + 3J_2 + J_3 - 5J_4 - 5J_5 + J_6 + 3J_7 + J_8 \\
 &= (J_1 + J_8) + 3(J_2 + J_7) + (J_3 + J_6) - 5(J_4 + J_5) \\
 &= 2J_M \gamma \cos \phi \left\{ \cos\left(\frac{7}{2}\Delta\phi\right) + 3\cos\left(\frac{5}{2}\Delta\phi\right) + \cos\left(\frac{3}{2}\Delta\phi\right) - 5\cos\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right) \right\} \\
 &= 2J_M \gamma \cos \phi \left\{ 64\cos^7\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right) - 112\cos^5\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right) + 56\cos^3\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right) - 7\cos\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right) \right. \\
 &\quad \left. + 48\cos^5\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right) - 60\cos^3\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right) + 15\cos\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right) \right. \\
 &\quad \left. + 4\cos^3\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right) - 3\cos\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right) \right. \\
 &\quad \left. - 3\cos\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right) \right\} \\
 &= 2J_M \gamma \cos \phi \left\{ 64\cos^7\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right) - 64\cos^5\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right) \right\} \\
 &= -128J_M \gamma \cos \phi \sin^2\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right) \cos^5\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right)
 \end{aligned}$$

よって,

$$\frac{-J_1 - J_2 + 3J_3 + 3J_4 - 3J_5 - 3J_6 + J_7 + J_8}{J_1 + 3J_2 + J_3 - 5J_4 - 5J_5 + J_6 + 3J_7 + J_8} = \tan \phi \tan \frac{\Delta\phi}{2}$$